Respostas Aula 1 (POTI) = Produtos Notáveis

01. **CPM 2010**. Alternativa **B.**

$$\frac{(a-b)^2+(a+b)^2-2a^2}{(a+b)^2-(a-b)*(a+b)} = \frac{a^2-2ab+b^2+a^2+2ab+b^2-2a^2}{a^2+2ab+b^2-a^2+b^2} = \frac{2b^2}{2ab+2b^2} = \frac{2b^2}{2b*(a+b)} = \frac{b}{a+b}$$

02. Ora: $(x^2+2xy+y^2) = (x+y)^2 = 5^2 = 25$
$(x^2-y^2) = (x+y)*(x-y) = 5*3 = 15$
$(x^2-2xy+y^2) = (x-y)^2 = 3^2 = 9$. Então, 25 + 15 + 9 = 49. Alternativa **C.**

03. **A)** $(-a-b)^2 = \left(-1*(a+b)\right)^2 = (-1)^2*(a+b)^2 = (a+b)^2$ => Verdadeiro
B) $(-a+b)^2 = (b-a)^2 = b^2-2*a*b+a^2 = (a-b)^2$ => Verdadeiro
C) $(a-b)^2+4*ab = a^2-2ab+b^2+4ab = a^2+2ab+b^2 = (a+b)^2$ => Verdadeiro
D) $(a+b)^2-4ab = a^2+2ab+b^2-4ab = a^2-2ab+b^2 = (a-b)^2$ => Falsa
E) Das anteriores, uma é falsa => Verdadeiro, a alternativa "**D**" é falsa.

Treinamento OBMEP 2014

a) **S** = $100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + 96^2 - 95^2 + ... + 2^2 - 1^2$:
Usando o produto da diferença de quadrados ficamos com:
$100^2 - 99^2 = (100+99)*(100-99) = (100+99)*(1) = 100+99$;
$98^2 - 97^2 = (98+97)*(98-97) = (98+97)*(1) = 98+97$;
: :
$2^2 - 1^2 = (2+1)*(2-1) = (2+1)*(1) = 2+1$
Se somarmos todas as igualdades, ficaremos com:
S = $100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + 96^2 - 95^2 + ... + 2^2 - 1^2 = 100+99+98+97+ ... +2+1$
Ou seja, a soma **S** é a soma de todos os naturais de 1 até 100. Para achar a soma S vamos ordená-la de duas formas diferentes, do menor para o maior e do maior para o menor:

S = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + 99 + 100 (I)
S = 100+99 + 98+97 + ... + 2 + 1 (II); Somando (I) e (II) teremos:
\+ + + + : : + + : :
S + **S** = 101+101+101+101 + ...+101 + 101 <=> 2*__S__ = 100*101 <=> **S** = 100*101÷ 2 = **5050**

b) Ora 999991 = 1000000 – 9 = $10^6 - 3^2$ <=> $(10^3-3)*(10^3+3) = 997*1003$

Treinamento OBMEP 2009. Quais são os números?

$x^4 = y^2 + 71 \iff x^4 - y^2 = 71 \iff (x^2+y)*(x^2-y) = 71$. Como x e y são inteiros positivos, os fatores (x^2+y) e (x^2-y) também são inteiros e $(x^2+y) > (x^2-y)$. Como 71 é primo, os únicos inteiros que lhe são fatores é o 1 e o próprio 71. Então:

$\begin{cases} x^2+y = 71 \text{ (I)} \\ x^2-y = 1 \text{ (II)} \end{cases}$ => Somando (I) + (II) => $2x^2 = 72$ => $x^2 = 36$ => $x = 6$ ($x = -6$ não pode, pois x deve ser positivo). Substituindo x em (II) => $36 - y = 1$ => $y = 35$. A única solução é $\boldsymbol{x=6}$ e $\boldsymbol{y=35}$.

Testes de Vestibulares, para esquentar...:

04. $\frac{6x^4y^3-4x^3y^4}{12x^3y^2-8x^2y^3} = \frac{\cancel{2x^3y^3}*(3x-\cancel{2}y)}{\cancel{4x^2y^2}*(3\cancel{x}-2y)} = \frac{xy}{2}$ **.** Alternativa **E.**

05. $\frac{x^2-1}{2x+2} = \frac{(x-1)*(\cancel{x+1})}{2*(\cancel{x+1})} = \frac{x-1}{2}$**.** Alternativa **B.**

06. $\frac{a^2+ab-a-b}{(a^2-1)*(a+b)} = \frac{a*(a+b)-(a+b)}{(a+1)*(a-1)*(a+b)} = \frac{(\cancel{a+b})*(\cancel{a-1})}{(a+1)*(\cancel{a-1})*(\cancel{a+b})} = \frac{1}{a+1}$**.** Alternativa **D.**

Problemas de Olimpíadas (Uhu! Cada um no seu quadrado...!) ☺:

a) $x + \frac{1}{x}$ = 3 <=> $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2$ = 3^2 <=> $x^2 + 2*x*\frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x}\right)^2$ = 9 <=> $x^2 + 2 + \left(\frac{1}{x}\right)^2$ = 9 <=>

<=> $x^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^2$ = 9 – 2 <=> $x^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^2$ = **7**.

b) $x + \frac{1}{x}$ = 3 <=> $\left(x + \frac{1}{x}\right)^3$ = 3^3 <=> $x^3 + 3*x*\frac{1}{x}*\left(x + \frac{1}{x}\right) + \left(\frac{1}{x}\right)^3$ = 27 <=> $x^3 + 3*3 + \left(\frac{1}{x}\right)^3$ = 27

<=> $x^3 + \left(\frac{1}{x}\right)^3$ = 27 – 9 <=> $x^3 + \left(\frac{1}{x}\right)^3$ = **18**.

c) De a) temos: $x^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^2$ = **7** <=> $\left(x^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^2\right)^2$ = 7^2 <=> $x^4 + 2*x^2*\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^4$ = 49 <=>

<=> $x^4 + 2 + \left(\frac{1}{x}\right)^4$ = 49 <=> $x^4 + \frac{1}{x^4}$ = **47**.

d) $\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right) * \left(x + \frac{1}{x}\right)$ = 47*3 <=> $x^5 + x^4 * \frac{1}{x} + \frac{1}{x^4} * x + \frac{1}{x^5}$ = 141 <=>

<=> $x^5 + \frac{1}{x^5} + x^3 + \frac{1}{x^3}$ = 141 <=> $x^5 + \frac{1}{x^5}$ + 18 = 141<=> $x^5 + \frac{1}{x^5}$ = **123.**

1. $n = 9999\cdots99$ = $10^{2011} - 1$ => $n^2 = (10^{2011} - 1)^2$ => $n^2 = (10^{2011})^2 - 2*10^{2011} + 1$ =>
$n^2 = 10^{4022} - 2*10^{2011} + 1$ = 999...9998000....0001
2010 noves; 1 oito; 2010 zeros e 1 um! Alternativa **C**.

2. $x + y$ = 8 <=> $(x + y)^2 = 8^2$ <=> $x^2 + 2*x*y + y^2$ = 64 <=> $x^2 + 2xy + 4xy + y^2$ = 64+ $4xy$ <=> $x^2 + 6xy + y^2$ = 64+ $4xy$ = 64 + 4*15 = 64 + 60 = 124. Alternativa **D**.

3. Chamando $x*y$ = 2 (I) e $x^2 + y^2$ = 5 (II); fazendo (II)÷(I) teremos:
$\frac{x^2+y^2}{x*y} = \frac{5}{2}$ <=> $\frac{x^2}{x*y} + \frac{y^2}{x*y} = \frac{5}{2}$ <=> $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{5}{2}$ <=> $\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2$ <=> $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 2\frac{x}{y} * \frac{y}{x} = \frac{\mathbf{25}}{\mathbf{4}}$
<=> $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 2 = \frac{\mathbf{25}}{\mathbf{4}}$. Alternativa **B**.

4. Chamemos 20112007 = a. Então queremos o valor de:
$(a + 4)^2 + (a - 4)^2 - 16*a = a^2 + 8a + 16 + a^2 - 8a + 16 - 16a = 2a^2 - 16a + 32 = 2*(a^2 - 8a + 16)$ = $2*(a - 4)^2$ => Substituindo valor de a => $2*20112003^2$. Alternativa **B**.

5. Os quadrados dos múltiplos de dez (10^2= 100; 20^2 = 400; 30^2 = 900; etc.) não alteram o algarismo das dezenas, apenas o algarismo das centenas. Analisando então os outros n^{os}:

$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + 8^2 + 9^2$ = 1 + 4 + 9 + ... + 64 + 81 = 285;

$11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2 + ... + 18^2 + 19^2 = (10+1)^2 + (10+2)^2 + (10+3)^2 + ... + (10+9)^2$ =
= $(10^2 + 2*10*1 + 1^2) + (10^2 + 2*10*2 + 2^2) + (10^2 + 2*10*3 + 3^2) + ... + (10^2 + 2*10*9 + 9^2)$ =>
=> agrupando os 1^{os} termos, os 2^{os} termos e os 3^{os} termos de cada parêntese, ficaremos: =>
$(10^2 + 10^2 + ... + 10^2) + 2*10*(1 + 2 + 3 + ... + 9) + (1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 9^2) = 9*10^2 + 2*10*45 + 285$ = 900 + 10*90 + 285 => Perceba que o 1º e o 2º termos não alteram o valor das dezenas, apenas o 3º e último termo, que por sua vez é igual a soma dos quadrados de 1 até 9 = 285.

O mesmo raciocínio pode ser estendido para as somas nas outras dezenas:

$21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 + ... + 28^2 + 29^2 = 9*20^2 + 2*20*45 + 285 = 9*400 + 2*20*90 + 285$
: : : : : : : : : : : :
$91^2 + 92^2 + 93^2 + 94^2 + ... + 98^2 + 99^2 = 9*90^2 + 2*90*45 + 285 = 9*8100 + 2*90*90 + 285$

Ou seja, a cada dezena, apenas o valor de 285 está afetando a casa das dezenas. Como até 2009 teremos 201 dezenas (lembre-se de que começamos da dezena do 0 (zero => 01; 02;

...$\underline{0}$9) estaremos somando $2\underline{85}*201 = 572\underline{85}$. Somando agora os fatores $2010^2 + 2011^2 + 2012^2 + 2013^2$, teremos: $2010^2 + 2011^2 + 2012^2 + 2013^2 = 2010^2 + (2010+1)^2 + (2010+2)^2 + (2010+3)^2 = 2010^2 + (2010^2 + 2*2010*1 + 1^2) + (2010^2 + 2*2010*2 + 2^2) + (2010^2 + 2*2010*3 + 3^2) = 4*2010^2 + 2*2010*(1 + 2 + 3) + (1^2 + 2^2 + 3^2) = 4*201\underline{0}*201\underline{0} + 2*2010*6 + 14 = 4*201\underline{0}*201\underline{0} + 12*2010 + 14$ => apenas os 2 últimos termos impactarão a dezena: $12*2010 + 14 = 241\underline{20} + \underline{14} = 241\underline{34}$.

Finalmente o algarismo das dezenas sairá da soma: $572\underline{85} + 241\underline{34} = 814\underline{19}$.

Obs.: Apesar dos algarismos das dezenas e unidades serem 1 e 9 respectivamente, não podemos afirmar que o algarismo das centenas será 4, uma vez que ignoramos todos os outros termos que não afetavam as dezenas, todavia afetavam da centena para cima.

6. => Faremos algumas transformações para ajudar nos cálculos:

$1.111.111.111 = 9.999.999.999 \div 9 = \left(\frac{10^{10} - 1}{9}\right)$

$22.222 = 2*11.111 = 2*99.999 \div 9 = 2*\left(\frac{10^5 - 1}{9}\right)$ => $1.111.111.111 - 22.222 =$

$\left(\frac{10^{10}-1-2*(10^5-1)}{9}\right) = \left(\frac{10^{10}-2*10^5+2-1}{9}\right) = \left(\frac{10^{10}-2*10^5+1}{9}\right) = \left(\frac{10^5-1}{3}\right)^2$; então

$\sqrt{1111111111 - 22222} = \sqrt{\left(\frac{10^5-1}{3}\right)^2} = \left(\frac{10^5-1}{3}\right) = \frac{100.000-1}{3} = \frac{99999}{3} = 33333$ => Resto $(33333)_9$ = Resto $(3+3+3+3+3)_9$ = Resto $(15)_9$ = **6**. Alternativa **D**.

7. Imagine o número com "**n**$_s$" 4; "**n-1**" 8 e um 9 apenas no final: 444...44888...889.

Quebrando o número, podemos ter: $444...44*10^n + 888...88*10 + 9 = 4*111...11*10^n + 8*111...11*10 + 9 = 4*\frac{999...9}{9}*10^n + 8*\frac{999...9}{9}*10 + 9 = 4*\frac{(10^n-1)}{9}*10^n + 8*\frac{(10^{n-1}-1)}{9}*10 + 9 =$

$\frac{(4*10^n-4)}{9}*10^n + \frac{(8*10^{n-1}-8)}{9}*10 + 9 = \frac{4*10^{2n}-4*10^n+8*10^n-80+81}{9} = \frac{4*10^{2n}+4*10^n+1}{9} =$

$= \left(\frac{\mathbf{2*10^n+1}}{\mathbf{3}}\right)^{\mathbf{2}}$ => sempre será um quadrado perfeito!

8. $2001 = 2*10^3 + 1$. Um quadrado perfeito deve ser da forma: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$. Fazendo b=1 e a=$10^3$, teremos $(10^3 + 1)^2 = 10^6 + 2*10^3 + 1$. Termina em 2001.

Como $(10^3 + 1)^2 = 10^6 + 2*10^3 + 1 = 1002001$ => 7 algarismos. Alternativa **D**.

9. $\sqrt{x + \frac{\sqrt{y}}{2}} - \sqrt{x - \frac{\sqrt{y}}{2}} = 1 \iff \sqrt{x + \frac{\sqrt{y}}{2}} = 1 + \sqrt{x - \frac{\sqrt{y}}{2}}$ => elevando ao quadrado => :

$x + \frac{\sqrt{y}}{2} = 1 + 2*\sqrt{x - \frac{\sqrt{y}}{2}} + x - \frac{\sqrt{y}}{2} \iff \sqrt{y} = 1 + 2*\sqrt{x - \frac{\sqrt{y}}{2}} \iff \sqrt{y} - 1 = 2*\sqrt{x - \frac{\sqrt{y}}{2}}$

Elevando ao quadrado => $y - 2*\sqrt{y} + 1 = 4*\left(x - \frac{\sqrt{y}}{2}\right) \iff y = 4*x - 2*\sqrt{y} + 2*\sqrt{y} - 1 \iff$

$\iff$ **$\mathbf{y = 4*x - 1}$**. Como x e y são inteiros, a única alternativa possível é a **C**.

10. Ora, $x^2 - y^2 = (x + y)*(x - y) = 2^{2010}$. Ou seja, 2^{2010} deve ser decomposto no produto de 2 fatores inteiros, sendo que o 1º fator "(x + y)" deve ser maior que o 2º fator "(x – y), uma vez que procuramos apenas (*x*, *y*) inteiros. 2^{2010} => (2010 + 1) divisores, os quais pertencerão ao conjunto $\{2^0; 2^1; 2^2; 2^3; ... 2^{1004}; 2^{1005}; 2^{1006}; ...; 2^{2007}; 2^{2008}; 2^{2009}; 2^{2010}\}$. Pegando parcelas duas a duas deste conjunto cujo produto dará 2^{2010} eu teria o seguinte conjunto de sistema de equações:

(1)$\begin{cases} x + y = 2^{2010} \\ x - y = 2^0 = 1 \end{cases}$; (2)$\begin{cases} x + y = 2^{2009} \\ x - y = 2^1 \end{cases}$; (3)$\begin{cases} x + y = 2^{2008} \\ x - y = 2^2 \end{cases}$;...;(1005)$\begin{cases} x + y = 2^{1006} \\ x - y = 2^{1004} \end{cases}$; (1006)$\begin{cases} x + y = 2^{1005} \\ x - y = 2^{1005} \end{cases}$

Teríamos 1006 soluções, mas o sistema (1) dá (x, y) fracionários (não inteiros) e o sistema (1006) dá ($x=2^{1005}$; y=0), mas como y deve ser positivo este sistema também não serve. Então temos apenas: 1006 – 2 = 1004 soluções (x; y). Alternativa **E**.

11. Fazendo o produto da soma pela diferença da direita para a esquerda, teremos:
$\sqrt{2+\sqrt{3}} \,.\, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \,.\, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \,.\, \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} = \sqrt{2+\sqrt{3}} * \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ $* \sqrt{4-2-\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \sqrt{2+\sqrt{3}} * \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} * \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \sqrt{2+\sqrt{3}} * \sqrt{4-2-\sqrt{3}} = \sqrt{2+\sqrt{3}}$ $* \sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{4-3} = \sqrt{1} = 1$. Alternativa **C**.

12. $x^3 + y^3 = 5(x+y)$ (I), e $x + y \neq 0$,
$x^2 + y^2 = 4$ (II) => Multiplicando por (x + y) dos 2 lados da igualdade teremos:
$(x^2 + y^2) * (x + y) = 4 * (x + y)$ <=> $x^3 + y^3 + x^2y + yx^2 = 4 * (x + y)$ <=> $x^3 + y^3 + xy * (x + y) = 4 * (x + y)$ <=> substituindo o valor de (I) <=> $5 * (x+y) + xy * (x + y) = 4 * (x + y)$ <=> $(x + y) * (5 + xy) = 4 * (x + y)$ <=> como $x + y \neq 0$, posso dividir os 2 lados da equação por (x + y) <=> 5 + xy = 4 <=> xy = 4 – 5 <=> xy = -1. Alternativa **E**.

13. Ora; $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3 * (x^2y + xy^2) = 9 + 3 * 6 = 9 + 18 = 27$ <=> (x + y) = 3. Alternativa **C**.

14. $\sqrt{x - y} = a$ <=> elevando ao quadrado $x - y = a^2$ (I); $\sqrt{x} + \sqrt{y} = b$ (II) <=> elevando ao quadrado $x + y + 2 * \sqrt{xy} = b^2$ <=> $(x + y) = b^2 - 2 * \sqrt{xy}$ (III)
De (I) temos: $x - y = a^2$ <=> aplicado diferença de quadrados temos: $(\sqrt{x} + \sqrt{y}) * (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = a^2$ <=> usando a relação (II) acima temos: $b * (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = a^2$ <=> $(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = \frac{a^2}{b}$ <=> elevando ao quadrado: $x + y - 2 * \sqrt{xy} = \frac{a^4}{b^2}$ <=> da relação (III) teremos: $b^2 - 2 * \sqrt{xy} - 2 * \sqrt{xy} = \frac{a^4}{b^2}$ <=> $- 4 * \sqrt{xy} = \frac{a^4}{b^2} - b^2$ <=> $- 4 * \sqrt{xy} = \frac{a^4 - b^4}{b^2}$; dividindo por "- 4" dos dois lados => $\sqrt{xy} = \frac{b^4 - a^4}{4b^2}$**.** Alternativa **A**.
.

15. Tal como no exercício **9**: $x^2 - y^2 = (x + y) * (x - y) = 36$. Novamente 36 deve ser decomposto em 2 fatores inteiros, um maior (x + y) e outro menor (x – y). Mas, $36 = 2^2 * 3^2$ => (2 + 1) * (2 + 1) = 9 divisores ou fatores que pertencem ao conjunto {1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18; 36}. Podemos formar os seguintes sistemas:

(1) $\begin{cases} x + y = 36 \\ x - y = 1 \end{cases}$; (2) $\begin{cases} x + y = 18 \\ x - y = 2 \end{cases}$; (3) $\begin{cases} x + y = 12 \\ x - y = 3 \end{cases}$; (4) $\begin{cases} x + y = 9 \\ x - y = 4 \end{cases}$; (5) $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 6 \end{cases}$

Os sistemas (1); (3) e (4) não dão soluções inteiras e o sistema (5) dá a solução (6; 0). Mas y deve ser positivo, então a solução (6; 0) não serve. Apenas o sistema (2) dá a solução **(10; 8)** que atende às premissas do enunciado.

16. Vamos chamar 2000 = a => 2004 * 2002 * 1998 * 1996 = (a + 4) * (a + 2) * (a - 2) * (a - 4) =
= (a + 4) * (a - 4) * (a + 2) * (a - 2) = $(a^2 - 16) * (a^2 - 4) = (a^4 - 4 * a^2 - 16 * a^2 + 64) = a^4 - 20 * a^2 + 64$ <=>
<=> $2004 * 2002 * 1998 * 1996 + 36 = a^4 - 20 * a^2 + 64 + 36 = a^4 - 20 * a^2 + 100 = (a^2 - 10)^2$. Então...

N = $\sqrt{2004 * 2002 * 1998 * 1996 + 36} = \sqrt{(a^2 - 10)^2} = (a^2 - 10)$. Substituindo de volta o valor de a = 2000, teremos N = 2000^2 -10 <=> N = 4.000.000 – 10 <=> **N** = 3.999.990 =>
=> Soma dos algarismos de N = 3 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 0 = **48.**

17. a) A expressão: $x^2 - 9xy + 8y^2$; o 1º termo é um número ao quadrado, o 3º termo é quase um quadrado também, se fosse y^2 seria um quadrado. Então, vamos ajeitar a expressão como:

$x^2 - 9xy + 8y^2 = x^2 - 2xy + y^2 + 7y^2 - 7xy = (x-y)^2 + 7y*(y-x)$. Como $(x - y)^2 = (y - x)^2$, a expressão ficaria: $(y-x)^2 + 7y*(y-x) = (y-x)*(y-x+7y) = (y-x)*(8y-x)$.

b) A expressão: $9xy - x^2 - 8y^2$ é exatamente o simétrico ou oposto de $x^2 - 9xy + 8y^2$ que já foi fatorada no item anterior; ou seja: $9xy - x^2 - 8y^2$ = - (y – x)*(8y – x) = (x – y)*(8y – x). Como x e y são inteiros, então os fatores (x – y) e (8y – x) também serão inteiros, e (x – y)*(8y – x) = 2005.

Como 2005 = 5*401 => os únicos pares de fatores inteiros cujo produto dá 2005 são 1 e 2005; ou 5 e 401 e seus pares simétricos -1 e -2005; ou -5 e -401.

(1)$\begin{cases} 8y - x = 1 \\ x - y = 2005 \end{cases}$; (2)$\begin{cases} 8y - x = 2005 \\ x - y = 1 \end{cases}$; (3)$\begin{cases} 8y - x = -1 \\ x - y = -2005 \end{cases}$; (4)$\begin{cases} 8y - x = -2005 \\ x - y = -1 \end{cases}$;

(5)$\begin{cases} 8y - x = 5 \\ x - y = 401 \end{cases}$; (6)$\begin{cases} 8y - x = 401 \\ x - y = 5 \end{cases}$; (7)$\begin{cases} 8y - x = -5 \\ x - y = -401 \end{cases}$; (8)$\begin{cases} 8y - x = -401 \\ x - y = -5 \end{cases}$

Os sistemas de (1) até (4) não dão soluções inteiras. Os sistemas de (5) até (8) dão respectivamente as soluções **(459; 58), (63; 58), (-459; -58)** e **(-63; -58).**

18. (a) Sejam x e y dois inteiros positivos tais que a diferença entre seus quadrados é igual a 105, ou seja, $x^2 - y^2 = 105$. Fatorando, obtemos (x - y)*(x + y) = 105 e, portanto, x + y e x - y devem ser divisores de 105, com x + y > x - y. Também observe que 1*105 = 3*35 = 5*21 = 7*15 são todas as maneiras de escrever o número 105 como produto de dois inteiros positivos. Assim, teremos quatro casos:

(I)$\begin{cases} x + y = 105 \\ x - y = 1 \end{cases}$ <=> x = 53 e y = 52; **(II)**$\begin{cases} x + y = 35 \\ x - y = 3 \end{cases}$ <=> x = 19 e y = 16;

(III)$\begin{cases} x + y = 21 \\ x - y = 5 \end{cases}$ <=> x = 13 e y = 8; **(IV)**$\begin{cases} x + y = 15 \\ x - y = 7 \end{cases}$ <=> x = 11 e y = 4.

Portanto, é possível escrever 105 como diferença de dois quadrados de quatro formas, a saber: $\mathbf{53^2 - 52^2}$; $\mathbf{19^2 - 16^2}$; $\mathbf{13^2 - 8^2}$ e $\mathbf{11^2 - 4^2}$.

(b) Observe que quaisquer que sejam os inteiros x e y, os números $x + y$ e $x - y$ são ambos pares ou ambos ímpares, pois a soma dos dois números é igual a $2x$, que é par, logo não podemos ter um par e o outro ímpar. Deste modo concluímos que o produto $(x+y)*(x-y) = x^2 - y^2$ é múltiplo de 4 (caso $x + y$ e $x - y$ sejam pares) ou um número ímpar (caso $x + y$ e $x - y$ sejam ímpares). Como 106 é par, mas não é divisível por 4, não pode ser escrito como diferença de dois quadrados. Outra maneira é tentar encontrar as soluções possíveis:

(I)$\begin{cases} x + y = 106 \\ x - y = 1 \end{cases}$ <=> $x = {}^{107}/_2$ e $y = {}^{105}/_2$; **(II)**$\begin{cases} x + y = 53 \\ x - y = 2 \end{cases}$ <=> $x = {}^{55}/_2$ e $y = {}^{51}/_2$. Nenhuma delas deixa um par (x ; y) de números inteiros.

19. Sejam as medidas dos lados do quadrado maior e menor iguais a ***x*** e ***y*** respectivamente. Como a diferença de áreas = 2001 cm^2 => $\boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{y}^2$ = 2001 => (*x* + *y*)*(*x* - *y*) = 2001. Como ***x*** e ***y*** são inteiros positivos, (*x* + *y*) e (*x* - *y*) também serão e (x + y) > (x - y). Decompondo 2001=3*23*29 podemos encontrar os seguintes pares cujo produto dá 2001:(2001; 1), (667; 3), (87; 23), (69; 29).

(1)$\begin{cases} x + y = 2001 \\ x - y = 1 \end{cases}$; (2)$\begin{cases} x + y = 667 \\ x - y = 3 \end{cases}$; (3)$\begin{cases} x + y = 87 \\ x - y = 23 \end{cases}$; (4)$\begin{cases} x + y = 69 \\ x - y = 29 \end{cases}$ => 4 sistemas de equações que dão os seguintes pares de soluções (***x***; ***y***) => {(1001; 1000), (335; 332), (55; 32), (49; 20)}.

20. Sugestão: Tente fatorar os números dados:
(a) Escrevendo o número dado como uma diferença de dois quadrados.
(b) Escrevendo o número dado como uma soma de dois cubos.

Fatos que Ajudam: Utilize as identidades:
(a) $m^2 - n^2 = (m - n)*(m + n)$
(b) $m^3 + n^3 = (m + n)*(m^2 - m*n + n^2)$

Solução:
(a) Observe que: 3999991 = 4000000 – 9 = $4*10^6 - 3^2 = (2*10^3)^2 - 3^2 = (2*10^3 - 3)*(2*10^3 + 3)$ = 1997*2003; e portanto não é um número primo.

(b) Observe que: 1000343 = $10^6 + 7^3 = (10^2)^3 + 7^3 = (10^2 + 7)*((10^2)^2 - 10^2*7 + 7^2)$ = 107* 9349; portanto não é primo.

21. Seja $4n^2+8 = k$ (k é um número inteiro positivo), então: $\left(10^{4n^2+8}+1\right)^2 = \left(10^k+1\right)^2\ 10^{2k} + 2*10^k + 1$ = 1000...000 + 2000...000 +1 = 1000...002000...001. Perceba que além dos “1s” das pontas e do “2” central, todos os outros algarismos do número são zeros, logo a soma dos algarismos = 1 + 2 + 1 = **4**.

22. Perceba que: $\mathbf{10^4+324} = 10^4+4*81 = 10^4+2*10^2*18+18^2 - 2*10^2*18 =$
$= (10^2+18)^2 - 10^2*36 = (10^2+18+6*10)*(10^2+18-6*10)$ = 178*58.
$\mathbf{4^4+324} = 4^4+4*81 = 4^4+2*4^2*18+18^2 - 2*4^2*18 = (4^2+18)^2 - 4^2*36 = (4^2+18+6*4)*(4^2+18-6*4)$ = 58*10.
$\mathbf{22^4+324} = 22^4+4*81 = 22^4+2*22^2*18+18^2 - 2*22^2*18 = (22^2+18)^2 - 22^2*36 = (22^2+18+6*22)*(22^2+18-6*22)$ = 634*370.
$\mathbf{16^4+324} = 16^4+4*81 = 16^4+2*16^2*18+18^2 - 2*16^2*18 = (16^2+18)^2 - 16^2*36 = (16^2+18+6*16)*(4^2+18-6*16)$ = 370*178.
$\mathbf{34^4+324} = 34^4+4*81 = 34^4+2*34^2*18+18^2 - 2*34^2*18 = (34^2+18)^2 - 34^2*36 = (34^2+18+6*34)*(34^2+18-6*34)$ = 1378*970.
$\mathbf{28^4+324} = 28^4+4*81 = 28^4+2*28^2*18+18^2 - 2*28^2*18 = (28^2+18)^2 - 28^2*36 = (28^2+18+6*28)*(28^2+18-6*28)$ = 970*634.
$\mathbf{46^4+324} = 46^4+4*81 = 46^4+2*46^2*18+18^2 - 2*46^2*18 = (46^2+18)^2 - 46^2*36 = (46^2+18+6*46)*(46^2+18-6*46)$ = 2410*1858.
$\mathbf{40^4+324} = 40^4+4*81 = 40^4+2*40^2*18+18^2 - 2*40^2*18 = (40^2+18)^2 - 40^2*36 = (40^2+18+6*40)*(40^2+18-6*40)$ = 1858*1378.
$\mathbf{58^4+324} = 58^4+4*81 = 58^4+2*58^2*18+18^2 - 2*58^2*18 = (58^2+18)^2 - 58^2*36 = (58^2+18+6*58)*(58^2+18-6*58)$ = 3730*3034.
$\mathbf{52^4+324} = 52^4+4*81 = 52^4+2*52^2*18+18^2 - 2*52^2*18 = (52^2+18)^2 - 52^2*36 = (52^2+18+6*52)*(52^2+18-6*52)$ = 3034*2410.

Substituindo: $\dfrac{\cancel{178}*\cancel{58}*\cancel{634}*\cancel{370}*\cancel{1378}*\cancel{970}*\cancel{2410}*\cancel{1858}*3730*\cancel{3034}}{10*\cancel{58}*\cancel{178}*\cancel{370}*\cancel{634}*\cancel{970}*\cancel{1378}*\cancel{1858}*\cancel{2410}*\cancel{3034}} = \dfrac{3730}{10}$ = **373**.

23. Imagine que o lado do quadrado maior tem lado igual a “x”. Como depois de cortado tenho 49 quadrados menores, sendo que destes temos 48 quadrados com área igual a 1cm^2, então somente me resta mais um quadrado de lado igual a “y”. Como as áreas inicial e final devem ser as mesmas, podemos escrever:

$$x^2 = 48 + y^2 <=> x^2 - y^2 = 48 <=> (x+y)*(x-y) = 48$$

Como ***x*** e ***y*** são lados de um quadrado e x > y, então (x + y) e (x - y) também serão inteiros positivos. Decompondo 48 = 2^4*3 podemos encontrar os seguintes pares cujo produto dá 48: (48; 1), (24; 2), (16; 3), (12; 4) e (8; 6).

(1)$\begin{cases} x+y = 48 \\ x-y = 1 \end{cases}$; (2)$\begin{cases} x+y = 24 \\ x-y = 2 \end{cases}$; (3)$\begin{cases} x+y = 16 \\ x-y = 3 \end{cases}$; (4)$\begin{cases} x+y = 12 \\ x-y = 4 \end{cases}$ e (5)$\begin{cases} x+y = 8 \\ x-y = 6 \end{cases}$=> 5 sistemas de equações, dos quais (1) e (3) não dão soluções inteiras e:

De (2) temos: x=13 e y=11 => **OK!**

De (4) temos: x=8 e y=4 => **OK!**

De (7) temos: x=7 e y=1 => **Não OK!** Pois o enunciado diz que temos <u>exatamente</u> 48 quadrados de Área “1”; porém neste último caso teremos mais um quadrado de lado “y=1”, totalizando 49 quadrados de Área “1”, contradizendo o enunciado.

24. Vamos chamar **a** = $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ e **b** = $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$, logo:

a + b = $\left(\frac{1+\sqrt{5}+1-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{2}{2} = \mathbf{1}$; e **a * b** = $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) * \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1-5}{4} = -\mathbf{1}$.

Mas sabemos que: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, logo: $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ <=>
<=> $a^2 + b^2 = (1)^2 - 2 * (-1)$ <=> $\mathbf{a^2 + b^2} = 1 + 2 = \mathbf{3}$.

$(a + b).(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$ <=> $\mathbf{a^3 + b^3} = (1) * (3 - (-1)) = \mathbf{4}$.

$(a^2 + b^2)^2 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4$ <=> $\mathbf{a^4 + b^4} = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 = (3)^2 - 2*(-1)^2 = \mathbf{7}$.

$(a^4 + b^4)*(a + b) = a^5 + b^5 + a^4b + b^4a = a^5 + b^5 + ab * (a^3 + b^3)$ <=>
<=> $a^5 + b^5 = (a^4 + b^4)*(a + b) - ab * (a^3 + b^3)$ <=> $\mathbf{a^5 + b^5} = (7)*(1) - (-1)*(4) = 7 + 4 = \mathbf{11}$.

E, finalmente:

$(a^5 + b^5)^2 = a^{10} + 2a^5b^5 + b^{10}$ <=> $\mathbf{a^{10} + b^{10}} = (a^5 + b^5)^2 - 2a^5b^5 = (11)^2 - 2*(-1)^5 = \mathbf{123}$.

25. Sejam **a** e **b** inteiros que satisfazem a condição do enunciado, logo:
$a + b = a*b$ <=> $a + b - a*b = 0$ <=> $a + b - a*b - 1 = -1$ <=> $(a - 1)*(1 - b) = -1$.

As únicas soluções inteiras possíveis são:

(I) $\begin{cases} a - 1 = -1 \\ 1 - b = 1 \end{cases}$ <=> $a = 0$ e $y = 0$; ou **(II)** $\begin{cases} a - 1 = 1 \\ 1 - b = -1 \end{cases}$ <=> $a = 2$ e $b = 2$.

Que dão os seguintes pares de soluções (***a***; ***b***) => {(0; 0), (2; 2)}.

26. Sabemos que:

$(n-1)^3 - 1^3 = ((n-1) - 1)*((n-1)^2 + n - 1 + 1^2) = (n - 2)*(n^2 - n + 1)$
$n^3 + 1^3 = (n + 1)*(n^2 - n + 1)$, logo podemos escrever:

$$\frac{\left((\mathbf{n-1})^{\mathbf{3}} - \mathbf{1^3}\right)}{(\mathbf{n^3+1})} = \frac{(\mathbf{n-2})*(\mathbf{n^2-n+1})}{(\mathbf{n+1})*(\mathbf{n^2-n+1})} = \frac{(\mathbf{n-2})}{(\mathbf{n+1})}$$, mas:

$$\frac{(2^3-1)*(3^3-1)*\ldots*(99^3-1)*(100^3-1)}{(2^3+1)*(3^3+1)*(4^3+1)\ldots(100^3+1)} = \frac{((3-1)^3-1)*((4-1)^3-1)*\ldots*(100^3-1)}{(2^3+1)*(3^3+1)*(4^3+1)\ldots(100^3+1)} =$$

$$= \frac{1*2*3*4*5*6*7*\ldots*97*98*(100^3-1)}{9*4*5*6*7*\ldots*97*98*99*100*101} = \frac{6*999999}{9*99*100*101} = \frac{2*3*9*111111}{9*9*11*100*101} = \frac{3367}{5050}.$$